

Застосування внутрішніх і зовнішніх функцій Вільямса для плоскої задачі теорії пружності з тріщиною моди I.

А.І. Ориняк • О.С. Яковлєва • І.В.Ориняк

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України

Received: 28 February 2018 / Accepted: 13 September 2018

Анотація. Основна ідея роботи полягає в використанні функцій Вільямса для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень для плоскої задачі теорії пружності для тіл з тріщинами. Введено поняття зовнішніх функцій Вільямса, які сходяться на нескінченності і, які разом з традиційними функціями, можуть використовуватися для нескінченних тіл і в задачах з частково навантаженими берегами тріщини. Показано збіжність результатів розрахунку КІН для для полоси та для тіл з круговою границею в залежності від кількості функцій Вільямса та від кількості інтервалів, на які розбивається границя при чисельному інтегруванні. Друга ідея роботи полягає в використанні глобальних рівнянь рівноваги тіла для покращення збіжності результатів. Приведено порівняння розрахункових напружень з заданими навантаженнями на границі.

Ключові слова: тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, внутрішні та зовнішні функції Вільямса, збіжність, функції Ері, статика плоского тіла.

Вступ

Функції Вільямса були запропоновані в 1957 році [1] для опису напружень і переміщень в околі тріщини в плоскому тілі, і з того часу є найбільш популярними функціями, що описуються в майже усіх підручниках з механіки руйнування [2]. Вони є комбінаціями пар функцій Ері, записаних в полярних координат, такими, що дають нульові напруження на берегах тріщини. Значення функцій Вільямса полягає в наступному.

1. Дають асимптотику і розподіл напружень і переміщень в околі тріщини, тим самим даючи чітке розуміння суті коефіцієнта інтенсивності напружень, КІН, як асимптотика виду, наприклад для напружень, K_{IH}/\sqrt{r} , де r - відстань від вершини тріщини. Логіка введення цих функцій пізніше була застосована самим Вільямсом для опису напружень в пластинах з тріщинами [3], а також багатьма іншими авторами для аналізу тріщин на границі двох середовищ [4], в тому числі, що з'єднуються під певним кутом [5].

2. Дозволяють визначити область, де напруження, що контролюються КІН, є домінуючими. Разом з тим, ці функції показують, що наступні за величиною напруження є однорідними, тобто не залежать від r і діють паралельно поверхні тріщини. Ці члени отримали назву T -напружень [6]. Свого часу вони були дуже популярними для пояснення того, чому критерії лінійної механіки руйнування (основані на понятті КІН), не завжди могли передбачити руйнующе навантаження. T -напруження до цього часу активно використовуються для модифікації критеріїв руйнування [7].

3. Вони є досить простим математичним інструментом, що дозволяє розв'язувати краєві задачі теорії пружності з тріщинами, особливо з тими, що виходять на вільну поверхню тіла. Початково метод, заснований на використанні функцій Вільямса, отримав назву методу граничних колокацій (boundary collocation method), і був відносно популярним на зорі становлення практичної механіки руйнування в 60-х роках минулого століття [8,9]. Свою назву метод отримав тому, що невідомі коефіцієнти розкладу визначалися із заданих граничних умов в наперед вибраних точках границі тіла (точках колокацій), число яких дорівнювало числу невідомих. Перевагою методу є те, що всередині тіла всі співвідношення виконуються точно, адже функції Вільямса є точним рішенням, і відхилення розрахункових параметрів (напруження або переміщення) на границі від заданих – є мірилом точності розв'язків задач. В відомому довіднику Саврука М.П. з механіки руйнування [10], представлено досить багато практичних результатів отриманих цим методом.

Подальша модифікація методу полягала в наближеному задоволенні граничних умов на всій поверхні тіла, що досягалось шляхом введення поняття інтегральної квадратичної похибки і мінімізації її методом

найменших квадратів [11-14]. Використовувалися різні модифікації інтегральної похибки - для точок, рівномірно розподілених по границі, точок, що згущаються при наближенні до лінії тріщини. Разом з тим, у цих роботах відмічалось [11-14], що похибка збільшується при збільшенні відношення відстаней від різних точок границі до центра координат (вершини тріщини). Це мабуть і зрозуміло, адже функції Вільямса записані в полярних координатах, а значить є найбільш ефективними для тіл, що мають границю в вигляді круга відносно центра координат.

Більше того, в роботі [12] детально вивчалися проблеми збіжності результатів, і звучали досить песимістичні оцінки щодо практичного використання методу. Відзначалось, що в певних невідомих наперед випадках результати визначення КІН розходилися, тобто зі збільшенням точок колокацій результати не прямують до одного значення, а деколи, навіть якщо і прямують, то це значення є невірним. Якщо вибирати велике число функцій Вільямса, наприклад, більше 80, то розрахункові напруження на границі показують великі флуктуації, які неможливо зменшити вибираючи метод мінімізації похибки – чи мінімізація в заданих точках (інтерполяційна апроксимація), чи мінімізація взагалі в усіх точках на границі (усереднена інтерполяція), що досягається аналітичним інтегруванням на елементарних ділянках границі. У випадку інтерполяційного методу – зміна як кількості розглядуваних точок на границі, так і кількості членів ряду Вільямса могли приводити до значного розходження результатів. У випадку аналітичного інтегрування, збільшення кількості елементарних ділянок приводило до збіжності результатів, тоді як збільшення кількості членів ряду Вільямса впливало на розбіжність результатів. Така непередбачувана поведінка розв'язків привела автора до парадоксального висновку, що система функцій Вільямса не є повною. Вона не може гарантувати досягнення точного розв'язку для плоского тіла довільної геометрії, і все це накладає обмеження на застосування методу граничної колокації (іншими словами, функцій Вільямса як інструмента розв'язку краєвих задач).

Зрозуміло, що в наш час наявності ефективних чисельних комерційних програм, які фактично дуже швидко дозволяють знайти майже математично точні розв'язки для довільних геометрій з тріщинами, майже всі аналітичні підходи втрачають своє практичне значення. Тим не менше, питання можливостей методу, його освітнього значення, виявлення реальних переваг і обмежень функцій Вільямса, залишаються відкритими. Це і є метою даної роботи.

Два попередніх міркування окреслюють ідею роботи.

1. В класичній теорії пружності для суцільного тіла існують функції Ері в полярних координатах. Ці функції діляться на дві підгрупи: а) – функції, що мають фізичний зміст в околі точки початку координат $r = 0$, і містять полярний радіус в додатній степені r^n , $n \geq 0$; б) - функції, що збігаються на нескінченності і містять члени з r^{-n} . Перші функції застосовуються для суцільних обмежених кругів, а другі – для необмежених тіл з круговою діркою. Проте застосовані разом, вони добре описують поведінку кругового кільця. Зрозуміло, що ефективність цих функцій значно зменшується, коли геометрія не є круглою. Логіка виведення функцій Вільямса також передбачає можливість існування членів з функціями r^{-n} , які відкидаються в околі вершини тріщини. Проте уже для якогось довільного значення $r \geq R_0$ можна вводити в розгляд члени з r^{-n} . Це і є першою ідеєю роботи – додатково до класичних (внутрішніх) ввести в розгляд зовнішні функції Вільямса.

2. Класична теорія пружності оперує функціями Ері в класичних координатах – декартових та полярних. Проте їх ефективність дуже низька для типових геометрій, за виключенням кругових геометрій для функцій в декартових координатах, які при $r = const$ дають систему ортогональних функцій $\cos n\phi, \sin n\phi$. Тоді граничні умови виражаються через систему взаємно ортогональних функцій, які досить легко піддаються чисельним розв'язкам, що мають збіжність. В усіх інших випадках формулювання системи рівнянь для невідомих коефіцієнтів через не ортогональні між собою функції може призвести до майже повної лінійної залежності між отриманими рівняннями. Тому отримані розв'язки демонструють значні флуктуації (відхилення від заданих на границі), визвані тим, що члени при великих n не прямують асимптотично до нуля. Фактично, ці члени можуть приводити до порушення глобальної рівноваги тіла. Тому в даній роботі ми додатково до умови мінімізації відхилення рішення на границі від заданих умов, накладаємо умови глобальної рівноваги тіла. Це є другою ідеєю роботи.

Дане дослідження обмежується лише тріщинами І-моди (нормального відриву).

Функції Ері в полярних координатах, внутрішні і зовнішні функції Вільямса

Приведемо відомі результати щодо функцій Ері в полярних координатах, та функцій Вільямса, що слідує із них.

Запишемо загальний вигляд функцій Ері [15]:

$$\phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{\frac{n}{2}}, \quad \psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^{\frac{n}{2}}, \quad (1)$$

де $a_n = \alpha_{1n} + i\beta_{1n}$; $b_n = \alpha_{2n} + i\beta_{2n}$, - невідомі коефіцієнти, $n = 1, 2, 3, \dots$. В полярній системі координат вирази

для напружень σ_r , σ_θ і $\tau_{r\theta}$ та переміщень u_r , u_θ є відомими [16]. З врахуванням симетрії навантаження ($\tau(\theta) = \tau(-\theta)$) $\beta_{1n} = \beta_{2n} = 0$ вони матимуть вид:

$$\sigma_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left[-\alpha_{1n} \frac{n-6}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta - \alpha_{2n} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (2a)$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left[\alpha_{1n} \frac{n+2}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta + \alpha_{2n} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (2b)$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n-2}{2}} \left[\alpha_{1n} \frac{n-2}{2} \sin \frac{n-2}{2} \theta + \alpha_{2n} \sin \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (2c)$$

$$2Gu_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[\alpha_{1n} \left(\kappa - \frac{n}{2} \right) \cos \frac{n-2}{2} \theta - \alpha_{2n} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (2d)$$

$$2Gu_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{\frac{n}{2}} \left[\alpha_{1n} \left(\kappa + \frac{n}{2} \right) \sin \frac{n-2}{2} \theta + \alpha_{2n} \sin \frac{n+2}{2} \theta \right], \quad (2e)$$

де $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ (плоский напружений стан). Функції Вільямса отримуємо з умов рівності нулю напружень σ_θ та $\tau_{r\theta}$ на берегах тріщини [1], що дає змогу для кожного n виразити коефіцієнт α_{2n} через α_{1n} :

$$\sigma_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta - \frac{n-6}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (3a)$$

$$\sigma_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[-\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta + \frac{n+2}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (3b)$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[-\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \frac{n+2}{2} \theta + \frac{n-2}{2} \sin \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (3c)$$

$$4Gu_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n}{2}} \left[\left(n + 2(-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta + (2\kappa - n) \cos \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (3d)$$

$$4Gu_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^{\frac{n}{2}} \left[-\left(n + 2(-1)^n \right) \sin \frac{n+2}{2} \theta + (2\kappa + n) \sin \frac{n-2}{2} \theta \right] \quad (3e)$$

Звичайно рішення Вільямса записують тільки для додатніх n . Розділимо ряди (3) на додатню ($n \geq 1$) і від'ємну ($n \leq -1$) частини, і введем позначення:

$$W_n^{\sigma_r} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n+2}{2} \theta - \frac{n-6}{2} \cos \frac{n-2}{2} \theta \right], \quad (4a)$$

$$W_{-n}^{\sigma_r} = r^{\frac{-n-2}{2}} \frac{-n}{2} \left[\left(\frac{-n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{-n+2}{2} \theta + \frac{n+6}{2} \cos \frac{n+2}{2} \theta \right]. \quad (4b)$$

Аналогічно для σ_θ , $\tau_{r\theta}$, u_r , u_θ .

Зауважимо, що $n = 0$, відповідає переміщенню тіла як цілого. Коефіцієнт α_1 пропорційний КІН, K_I

$$K_I = \alpha_1 \sqrt{2\pi} \quad (5)$$

Вирази типу (4a) назвемо внутрішніми функціями Вільямса (*inner*), а вирази (4b) – зовнішніми (*outer*). Очевидно, біля вершини тріщини можна оперувати лише внутрішніми функціями [1,2]. Як буде показано нижче, зовнішні функції Вільямса зручно використовувати для зовнішніх областей тіла ($r > 1$). Звичайно, при цьому необхідно робити спряження зовнішніх і внутрішніх функцій на границі $r = 1$. Це відносно легко робити, оскільки обидва рішення мають однакову структуру при однакових n , що показано на прикладі $W_n^{\sigma_r}$ та $W_{-n}^{\sigma_r}$ в таблиці 1.

Таблиця 1

Деякі внутрішні, $W_n^{\sigma_r}$, та зовнішні $W_{-n}^{\sigma_r}$ функції при однакових n

n	$W_n^{\sigma_r}$	$W_{-n}^{\sigma_r}$
1	$\frac{5}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right)$	$\frac{3}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{7}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right)$
2	$2\cos(2\theta) + 2$	$-4\cos(2\theta)$
3	$\frac{9}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) + \frac{3}{4}\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right)$	$\frac{15}{4}\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right) - \frac{27}{4}\cos\left(\frac{5}{2}\theta\right)$
4	$2\cos(\theta) + 6\cos(3\theta)$	$2\cos(\theta) - 10\cos(3\theta)$
5	$\frac{5}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) + \frac{15}{4}\cos\left(\frac{7}{2}\theta\right)$	$\frac{35}{4}\cos\left(\frac{3}{2}\theta\right) - \frac{55}{4}\cos\left(\frac{7}{2}\theta\right)$
6	$12\cos(4\theta)$	$6\cos(2\theta) - 18\cos(4\theta)$

Враховуючи позначення (4), формули (3) запишемо у вигляді:

$$\sigma_r^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\sigma_r}, \quad \sigma_{\theta}^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\sigma_{\theta}}, \quad 4Gu_r^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{u_r}, \quad 4Gu_{\theta}^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{u_{\theta}}, \quad (6a)$$

Або в загальному вигляді вектор розв'язку \vec{S}^{in} , представляється через вектор внутрішніх функцій Вільямса \vec{W}_n^{in}

$$\vec{S}^{in} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \vec{W}_n^{in} \quad (6b)$$

$$\sigma_r^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_{-n}^{\sigma_r}, \quad \sigma_{\theta}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_{-n}^{\sigma_{\theta}}, \quad 4Gu_r^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_{-n}^{u_r}, \quad 4Gu_{\theta}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n W_{-n}^{u_{\theta}}. \quad (7a)$$

Або в загальному вигляді вектор розв'язку \vec{S}^{out} , представляється через вектор внутрішніх функцій Вільямса \vec{W}_n^{out}

$$\vec{S}^{out} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \vec{W}_n^{out} \quad (7b)$$

Застосування внутрішніх функцій Вільямса

Розглянемо круговий диск, на границю якого виходить радіальна тріщина, центр якої співпадає з центром кола. Контур диска вільний від нагрузки, а на берега тріщини діє одиничне навантаження $\sigma_{\theta}|_{\theta=\pi} = 1$ і $\tau_{r\theta}|_{\theta=\pi} = 0$ (Рис 1). Розв'язок шукаємо як суму частинного розв'язку, що дається функцією Ері (2) при $n = 1$, приймаючи $\alpha_{1,n=1} = 1$ і $\alpha_{2,n=1} = 0$, та загального розв'язку Вільямса (3).

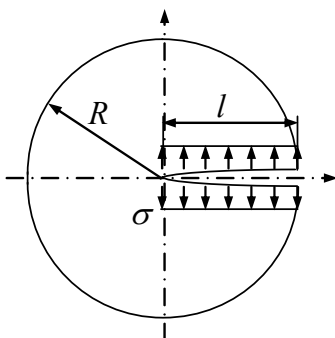


Рис. 1. Диск з радіальною тріщиною, при одиничному навантаженні її берегів

Це зводить задачу до такої, що напруження на берегах тріщини дорівнюють нулю, а на круговій границі тіла діють радіальні напруження $\sigma_r(r=R)=1$, а дотичні рівні нулю: $\tau_{r\theta}=0$. Це дає змогу шукати рішення в вигляді (6) з N невідомими коефіцієнтами α_n . Для визначення коефіцієнтів α_n будемо послідовно множити вирази для σ_r на систему перпендикулярних на півколі $0 \leq \theta \leq \pi$ функцій $\cos((k-1/2)\theta)$ та інтегрувати по півколу, а вирази для $\tau_{r\theta}$ на функції $\sin((k-1/2)\theta)$, тобто:

$$\int_0^{\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n W_n^{\tau_{r\theta}} \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0$$

Отримане таким чином значення K_I (5) дуже добре узгоджується з точним значенням представленим у [10] (Таб. 2). Як бачимо, уже всього 8 членів розкладу дають надзвичайно точне рішення і дають оптимістичний погляд на функції Вільямса як на інструмент рішення краєвих задач.

Таблиця 2

Порівняння КІН для круга з краю тріщиною з вершиною в центрі круга

N	K_I	K_I [10]	%
8	3,17218	3,17214	0,0013
20	3,1721376		$7,5 \cdot 10^{-5}$

Тепер розглянемо симетричну полосу з краю тріщиною, навантажену одиничним навантаженням σ , на грані BC (Рис 2), а бокові грані AB і CO - вільні від загрузки. Тут a - довжина тріщини, b - половина висоти полоси, t - її ширина, x, y - декартові координати, що також відраховуються від вершини тріщини.

Зручно записати вирази Вільямса для напружень в декартових координатах $W_n^{\sigma_x}$, $W_n^{\sigma_y}$, $W_n^{\tau_{xy}}$:

$$W_n^{\sigma_x} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(2 + \frac{n}{2} + (-1)^n \right) \cos \frac{n-2}{2} \theta - \frac{n-2}{2} \cos \frac{n-6}{2} \theta \right] \quad (9a)$$

$$W_n^{\sigma_y} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[\left(2 - \frac{n}{2} - (-1)^n \right) \cos \frac{n-2}{2} \theta + \frac{n-2}{2} \cos \frac{n-6}{2} \theta \right] \quad (9b)$$

$$W_n^{\tau_{xy}} = r^{\frac{n-2}{2}} \frac{n}{2} \left[- \left(\frac{n}{2} + (-1)^n \right) \sin \frac{n-2}{2} \theta + \frac{n-2}{2} \sin \frac{n-6}{2} \theta \right] \quad (9c)$$

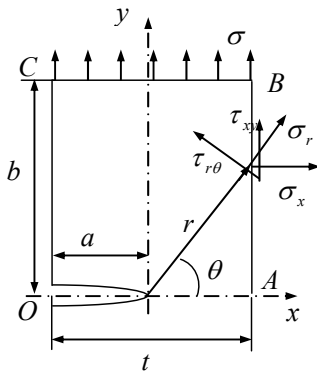


Рис. 2. Полоса навантажена одиничною навантаженням

Зауважимо, що тут і нижче використовувались інтегрально усереднені [12] граничні умови. В зв'язку з тим, що результати аналізу часто розходилися, дуже залежали від кількості ділянок інтегрування і невідомих членів розкладу, було вибрано декілька варіантів граничних умов. Це зроблено для того, щоб вияснити, чи сам підхід, щодо використання функцій Вільямса є обмеженням, чи на точність результатів впливає техніка його реалізації.

Першим підходом було введення систем ортогональних функцій $\cos((2k-1)\pi s/2L)$ та $\sin((2k-1)\pi s/2L)$, де L повна довжина контуру полоси $L = |AB| + |BC| + |CO|$, а координата s характеризує положення точки на границі тіла і відраховується від точки A до точки O . Мінімізація похибки задоволення граничних умов по цим функціям приводила до того, що ці результати були найменш точними, часто розходилися і тому тут не приводяться.

Другим підходом була реалізація методу найменших квадратів, МНК. Записувався функціонал напружень, I , на границі:

$$\int_S \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\sigma_s} - \sigma^b(s) \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\tau_s} - \tau^b(s) \right)^2 ds = I \quad (10)$$

де $W_n^{\sigma_s}$ - нормальні, а $W_n^{\tau_s}$ - дотичні напруження Вільямса на границі, σ^b , τ^b - задані на границі напруження, S - границя області. Чисельне інтегрування проводилося по формулі параболи. Отримані результати K_I пораховано для $N = 40, 50, 60$, при розбивці кожної грані на m ділянок, де m приймалося від 1000 до 2000. Для відносної глибини тріщини $a/t = 0.4$ та $a/t = 0.6$ результати відрізняються від літературних [15] на 0,4%, а в окремих випадках розбивки до 0,8 %. Гірші результати були отримані для $a/t = 0.2$, тут отримані значення K_I були значно менші за відомі в літературі і середня похибка досягала 4,5% - 5,5%, а в окремих випадках розбивки більше 10 %. Тобто похибка для $a/t = 0.2$ більш ніж на порядок перевищує похибку для $a/t = 0.4$. Причина очевидна і уже обговорювалася вище. Тобто Функції Вільямса записані в полярних координатах, і чим менше відношення відстані ближчої точки контуру до найдальшої, тим проблемнішим стає застосування методу.

Наступним підходом була нормалізація виразів для напружень по самим функціям Вільямса. Тут розглядаються результати тільки для $a/t = 0.2$. Записуються наступні вирази – інтегральні усереднені по самим функціям Вільямса граничні умови

$$\int_S \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\sigma_s} - \sigma^b(s) \right) W_{2k-1}^{\sigma_s} ds = 0 \quad \int_S \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\tau_s} - \tau^b(s) \right) W_{2k-1}^{\tau_s} ds = 0 \quad (11)$$

По загальному вигляду і технічній реалізації цей підхід нагадує попередній і приводить до подібних результатів.

Кращі результати було досягнуто, коли функції розкладу мають вид: $(W_k + W_{k+1})/2$. Значення K_I відрізняються від наведених в [15] на 3% – 4% для $N = 40, 50, 60$. Але в окремих випадках розбіжки, наприклад, при $N = 60$ для 2500, 2501 і 2502 точок, відхилення становлять 4,6%, 0,05% і 4,1% відповідно. Такі флуктуації результатів при дуже незначному уточненні процедури чисельного отримання коефіцієнтів матриці свідчать про нестійкість самого методу.

Інша ідея реалізації полягала в додатковому використанні умови рівності проекції головного вектора сил на вісь OY і головного моменту відносно точки A . Зауважимо, що проекції розрахункових напружень в силу симетрії вибраних функцій Вільямса на вісь OX складових не дають. До системи рівнянь (10) додаються наступні рівняння:

$$\begin{aligned} \int_{AB} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds + \int_{BC} \alpha_n W_n^{\sigma_y} ds - \int_{CO} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds &= \int_{BC} 1 \cdot ds \\ \int_{AB} \alpha_n W_n^{\sigma_x} ds + \int_{BC} \alpha_n W_n^{\sigma_y} ds + b \int_{BC} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds - t \int_{CO} \alpha_n W_n^{\tau_{xy}} ds &= \int_{BC} 1 \cdot ds \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 3. представлена похибка значень в процентах $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ для $N = 10-60$, для різних дискретизацій. Відхилення від точних значень КІН, наведених в літературі [15] залежить від числа N і становило 3-5% для $20 < N < 30$ та 0.2-1% для $35 < N < 46$. При $N > 50$ результати починають розходитися при зміні кількості точок чисельного інтегрування, що є свідченням нестійкості методу. Разом з тим, похибка обчислень є досить задовільною порівняно з попередніми методами і свідчить про ефективність і необхідність використання інтегральних умов рівноваги на границі. Очевидно, що рівняння рівноваги стабілізують рішення для КІН. Хоч, розрахункові напруження на границі тіла, як і в попередніх варіантах, все ще демонструють дуже значні відхилення від заданих, проте інтегрально вони є врівноваженими.

На рис. 4 і 5 показані напруження σ_x , σ_y і τ_{xy} , отримані з формул (3), на границі полоси для двох випадків: без врахування рівнянь рівноваги і з їх врахуванням. Але не зважаючи на те, що амплітуда відхилень розрахункових напружень (для випадку врахування рівнянь рівноваги) більша ніж при їх відсутності, значення K_I ближчі до літературних.

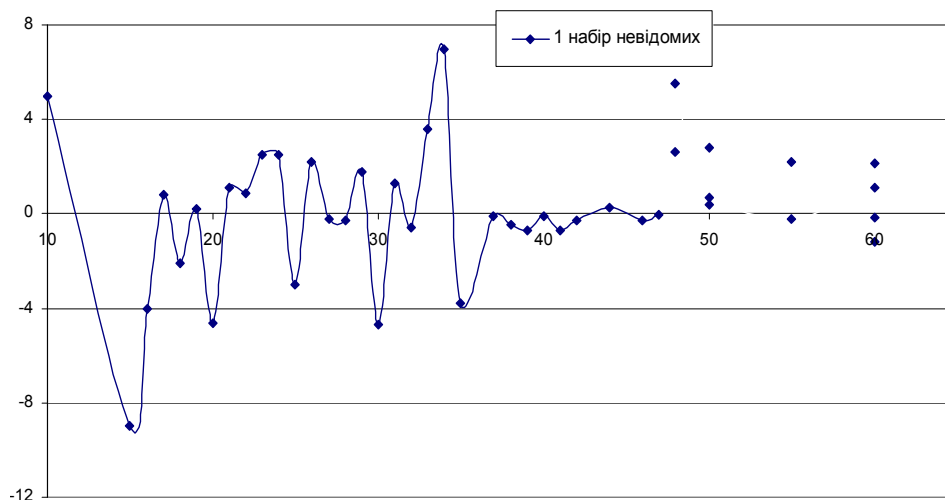
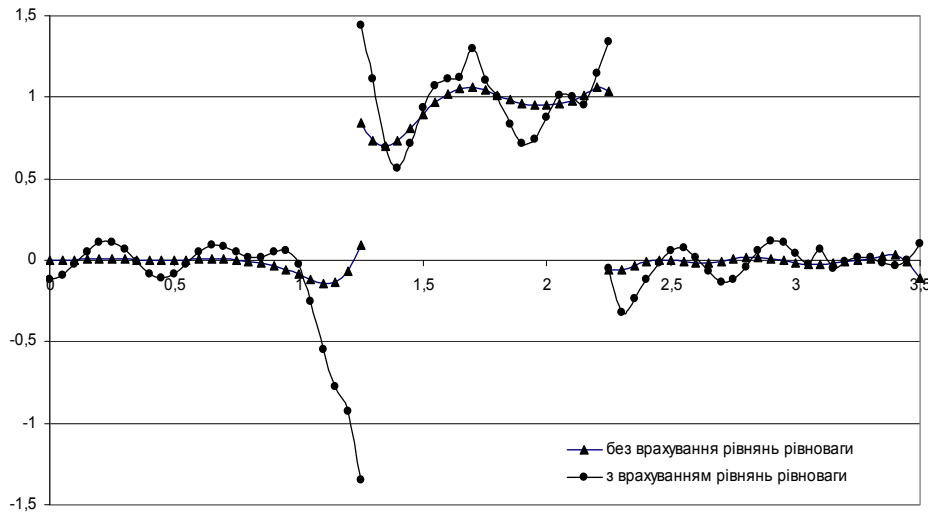
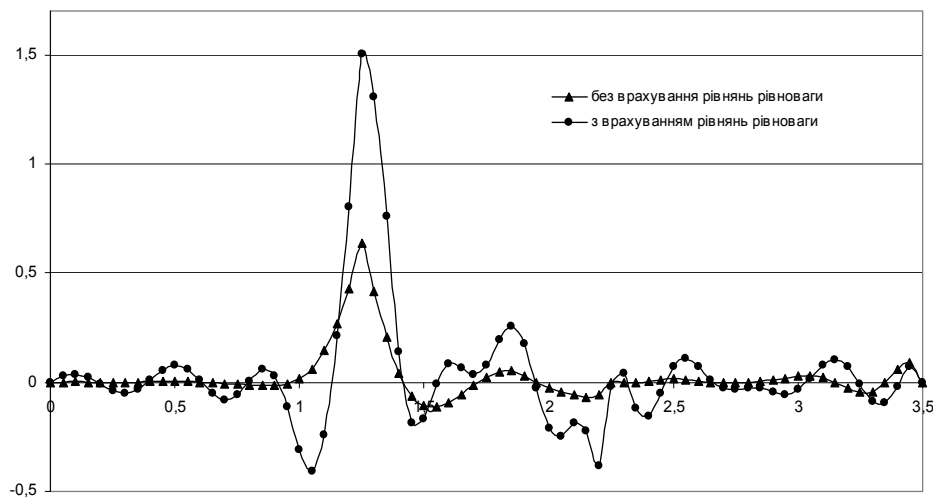


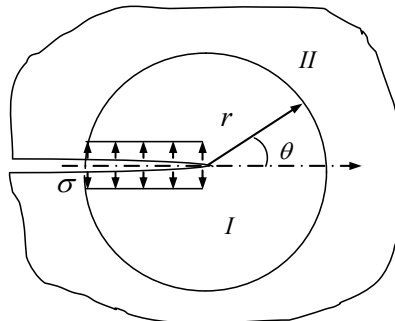
Рис. 3. Відхилення розрахункових КІН від точних значень при використанні рівнянь рівноваги

Рис. 4. Напруження σ_x , σ_y на границі полосиРис. 5. Напруження τ_{xy} , на границі полоси

Застосування зовнішніх функцій Вільямса

Розглянемо спочатку задачі, де застосування зовнішніх розв'язків Вільямса є найбільш очевидним.

Розглянемо нескінченну площину з тріщиною (Рис. 6). на берега тріщини діє постійна одиничне навантаження σ . Навколо вершини тріщин опишемо коло одиничного радіусу. Таким чином маємо дві області: всередині кола (I) і зовні (II).

Рис. 6. Нескінченне тіло з краюною тріщиною, навантаженою однорідними напруженнями на ділянці $l \leq r$

В області I напруження і переміщення записуються виразами (6), а в області II - (7). На колі, в центрі якого знаходиться центр полярної системи координат, запишемо інтегрально усереднені умови по системі нормальних функцій (як в формулі (8)) рівності напружень і переміщень, з врахуванням переміщення як цілого

в напрямку осі x :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \left(-1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
 & \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{\tau_{r\theta}} \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
 & \int_0^\pi \left(-(\kappa-1) + \sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{u_r} - x_0 \cos \theta \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
 & \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \beta_n W_{-n}^{u_\theta} + x_0 \cos \theta \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0
 \end{aligned} \tag{13}$$

тут x_0 - є невідоме переміщення внутрішньої області I як цілого тіла. Вирази (13) є системою лінійних рівнянь відносно двох наборів невідомих коефіцієнтів α_n^I , β_n^{II} ($n=1, \dots, N$) і значення x_0 переміщення тіла як цілого. Значення K_I наведені в таблиці 3. порівнювалися з математично точним значенням [10] для цієї задачі.

Таблиця 3

Значення КІН для задачі Рис. 6

N	K_I	K_I [10]	%
2	-2,16	1,5955	
4	1,5958		0,019
6	1,5958		0,019

Отже, уже починаючи всього з 8+1 невідомих коефіцієнтів бачимо надзвичайно хорошу точність результатів.

Розглянемо наступну задачу – круг радіуса $R_e > 1$ з краєвою тріщиною з вершиною в центрі круга навантажений однорідними напруженнями σ на довжині $l=1$ (Рис 7). Умовно розділимо повний круг на дві області – круг радіуса $R_0 = 1$, та доповнюючи до повної області кільце $R_0 \leq r \leq R_e$.

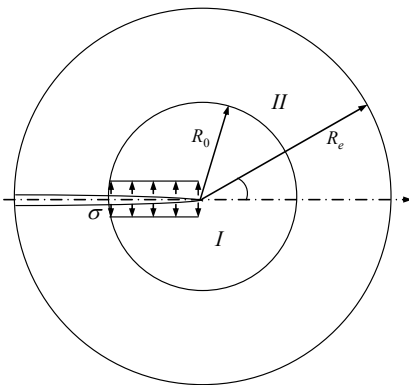


Рис. 7. Круг навантажений однорідними напруженнями на частині поверхні

Оскільки область II не є нескінченною, то в ній повинні існувати як внутрішні так і зовнішні функції Вільямса, що визначаються виразами (6) та (7). В області I, як і раніше розглядаємо лише функції (6). Таким чином маємо три набори невідомих коефіцієнтів $-\alpha_n^I$, α_n^{II} , β_n^{II} ($n=1, \dots, N$) і невідоме переміщення x_0 внутрішньої області I як цілого тіла. Для задоволення умов навантаження внутрішньої області візьмемо, як в задачі Рис 1, частинний розв'язок, що дається функцією Ері (2) при $n=1$, приймаючи $\alpha_{1,n=1} = 1$ і $\alpha_{2,n=1} = 0$.

Привіряємо напруження і переміщення в зовнішній області і внутрішній області на колі одиничного радіуса, як їхній спільний границі (умови спряження). Зовнішню границю вважаємо вільною від напружень (граничні умови). Визначальні рівняння відносно невідомих коефіцієнтів α_n^I , α_n^{II} , β_n^{II} отримаємо шляхом почергового множення і інтегрування граничних умов і умов спряження на систему нормальних функцій (як раніше). Таким чином отримали

систему лінійних рівнянь відносно трьох наборів невідомих – умови спряження:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \left(-1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
 & \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{\tau_{r\theta}} \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
 & \int_0^\pi \left(-(\kappa-1) + \sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{u_r} - x_0 \cos \theta \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta = 0 \\
 & \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_{-n}^{u_\theta} + x_0 \cos \theta \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta = 0
 \end{aligned} \tag{14}$$

Вільна від напружень границя:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_r} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\sigma_r} \right) \cos((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \\ \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} \right) \sin((k-1/2)\theta) d\theta &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

В таблиці 4 значення K_I для $r = 2, 3, 10$ порівнюються з отриманими за допомогою МСЕ на основі досить густої сітки, згущення якої уже не приводило до зміни результату. Як бачимо, для подібних геометрій використання зовнішніх і внутрішніх функцій Вільямса є дуже ефективним.

Таблиця 4

Порівняння КІН для геометрії Рис 4 з використанням зовнішніх і внутрішніх функцій Вільямса та отриманих з допомогою МСЕ

	$R_e = 2$			$R_e = 3$			$R_e = 10$		
N	K_I	K_I [МСЕ]	%	K_I	K_I [МСЕ]	%	K_I	K_I [МСЕ]	%
12	3,3765	3,3738	0,08	2,7248	2,7223	0,09	1,9081	1,9074	0,04
18	3,3725		0,04	2,7209		0,05	1,9069		0,02

Після таких успішних застосувань зовнішніх функцій Вільямса, виникає питання чи можна з їх допомогою покращити результати для не круглих геометрій також? Тому знову розглянемо задачу про полосу навантажену одиничною навантажкою (Рис. 2), проблемою якої було те, що відстань від вершини тріщини найдальшої точки контура приблизно в 7 разів перевищувала відстань до найближчої точки, тобто $|\vec{B}|/|\vec{O}| \approx 7$.

Навколо вершини тріщини з центром у вершині проведемо коло радіуса 0.5. Цим колом розділяємо нашу геометрію на дві підобласті I та II, Рис 8. Тепер відношення відстаней до центру для кожної із підобластей буде меншим: для внутрішньої це відношення дорівнює $0.5/0.2 = 2.5$, для зовнішньої $\approx 1.4/0.5 = 2.8$.

Знову будемо вважати, що в першій області існують лише внутрішні функції, а в зовнішній – як внутрішні так і зовнішні. Очевидно, що при розв'язуванні задачі ми повинні задовольнити умовам спряження та граничним умовам. Із багатьох варіантів можливої реалізації вибрали наступний. Умови спряження і умови на границі полоси записувалися за допомогою методу найменших квадратів. При цьому мінімізувалося два функціонала: один (I_d) – для переміщень (мінімізувався по β_n^{II} та x_0), другий (I_s) – для напружень (мінімізувався по α_n^I , α_n^{II}) (16).

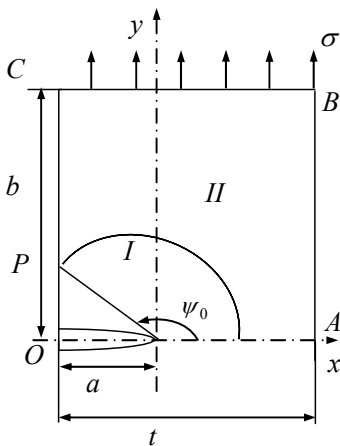


Рис. 8. Введення внутрішньої під області для задачі полоси з тріщиною

$$\begin{aligned} & \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{u_r} - x_0 \cos \theta \right)^2 d\theta + \\ & \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{u_\theta} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{u_\theta} + x_0 \cos \theta \right)^2 d\theta = I_d \\ & \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_r} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\sigma_r} \right)^2 d\theta + \\ & \int_0^{\psi_0} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^I W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} - \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\tau_{r\theta}} \right)^2 d\theta + \\ & + \int_{AB} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_x} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\sigma_x} \right)^2 ds + \int_{AB} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} \right)^2 ds + \\ & + \int_{BC} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_y} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\sigma_y} - 1 \right)^2 ds + \int_{BC} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} \right)^2 ds + \\ & + \int_{CP} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_x} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\sigma_x} \right)^2 ds + \int_{CP} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} + \sum_{n=1}^N \beta_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} \right)^2 ds + \\ & \int_{PO} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\sigma_x} \right)^2 ds + \int_{PO} \left(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{II} W_n^{\tau_{xy}} \right)^2 ds = I_s \end{aligned} \quad (16)$$

де кут ψ_0 - кут між віссю OX та точкою P перетину одиничного кола з границею CO - зображений на Рис 6.

Таким чином отримали систему лінійних рівнянь відносно трьох наборів невідомих коефіцієнтів α_n^I , α_n^{II} , β_n^{II} ($n=1, \dots, N$) і переміщення x_0 , тобто загальна кількість невідомих становить $3N+1$. На Рис 9 показано відхилення безрозмірного значення $K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$ від порахованого нами методом скінченних елементів за допомогою комерційного комплексу ANSYS [17]. Найменша похибка досягається при $N=26-28$ і становить 0.2-0.5%. Зі збільшенням числа невідомих результати починають залежати від кількості точок інтегрування, тобто стають розбіжними.

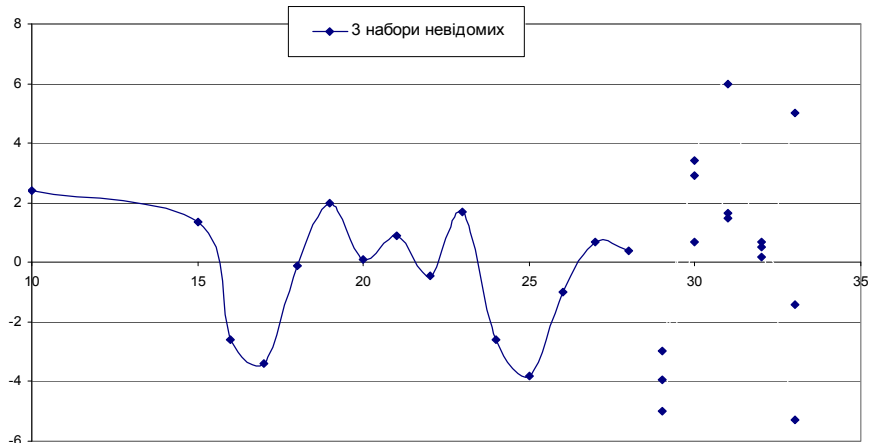


Рис. 9. Відхилення для задачі Рис 8 розрахункових КІН від точних значень при використанні 3-х наборів невідомих

Висновки

Стаття стосується можливості використання внутрішніх і зовнішніх функцій Вільямса для розрахунку КІН в плоских тілах і має більш освітнє, ніж практичне значення і підсумовує полеміку щодо функцій Вільямса як інструменту вирішення краєвих задач.

1. Функції Вільямса, як функції, що представляються в полярних координатах, є надзвичайно ефективним інструментом для тіл, границя яких відносно вершини тріщини наближається до кругової геометрії. Очевидно, що подібні висновки існують взагалі для розв'язків задач теорії пружності в полярних координатах.

2. Введення зовнішніх функцій Вільямса дозволило ефективно розв'язувати задачі для нескінченних тіл, або для тіл кругової геометрії, берега тріщин яких частково навантажені по поверхні. В цьому випадку тіло розбивається на декілька допоміжних кілець, в кожному із яких вводяться системи функцій Вільямса, а по границях їх вводяться допоміжні умови спряження.

3. Для тіл не кругових геометрій застосування функцій Вільямса стає тим більше проблематичним, чим більше відношення найдальшої точки поверхні до найближчої. Найкращі результати отримуються, коли для задоволення граничних умов застосовується метод найменших квадратів або мінімізація по самим функціям Вільямса. Але і при цьому для прямокутного тіла з краю тріщиною при відношенні більше 7 внутрішні функції Вільямса дають неточність визначення КІН до 5%.

4. Додаткове застосування умов глобальної рівноваги дозволяє добитися кращої збіжності результатів та покращання точності до 0.2-0.5% для вказаної в п.3 геометрії

5. Використання штучних додаткових границь і введення різних наборів функцій Вільямса (внутрішніх і зовнішніх) для отриманих таким чином областей тіла – не покращує ефективність методу порівняно з п. 4.

Применение внутренних и внешних функции Вильямса для плоской задачи теории упругости с трещиной Моды I

А.И. Орыняк, Е.С. Яковлева, И.В. Орыняк

Аннотация. Основная идея работы заключается в использовании функций Вильямса для расчета коэффициентов интенсивности напряжений для плоской задачи теории упругости для тел с трещинами. Введено понятие внешних функций Вильямса, которые сходятся на бесконечности и, которые наряду с традиционными функциями, могут использоваться для бесконечных тел и в задачах с частично нагруженными берегами трещины. Показано сходимость результатов расчета КИН для полосы и для тел с круговой границей в зависимости от количества функций Уильямса и от количества интервалов, на которые разбивается граница при численном интегрировании. Вторая идея работы

заключается в использовании глобальных уравнений равновесия тела для улучшения сходимости результатов. Приведены сравнения расчетных напряжений с заданными нагрузками на границе.

Ключевые слова. Трещина, коэффициент интенсивности напряжений, внутренние и внешние функции Вильямса, сходимость, функции Эри, статика плоского тела.

Application of the internal and external Williams functions to plane elasticity problem for A Mode I crack

A. Oryniak, E. Yakovleva, I. Orynyak

Abstract. The main idea of this research is in applying Williams functions to calculate stress intensity factors (SIF) in case of 2D elastic bodies with cracks. Firstly, we employ the concept of Williams functions converging on infinity which can be used along with traditional functions to analyse infinite bodies and to study partially loaded crack boundaries. We show the convergence of SIF for the case of a strip and for the bodies with circular boundary depending on the number of Williams functions and on the number of intervals on the boundary in case of numerical integration. Secondly, we complement the standard set of equations with the global equilibrium conditions of the elastic body to improve the accuracy of the calculation. We compared the computed stress with the one defined on the boundary.

Keywords: Crack, stress intensity factor, inner and outer Williams function, convergence, Eri functions, static plane body.

References

- Williams M. L., Pasadena C. On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack // J. Appl. Mech., 1957, 24, No. 1, pp. 109 – 114.
- Hellan K., Introduction to Fracture Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1984.
- Williams M. L., The Bending Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack. Journal of Applied Mechanics, March, 1961.
- Maliková L. and Seitl S. Application of the Williams Expansion near a Bi-Material Interface, Key Engineering Materials, - 2017. – Vol. 754, pp. 206-209. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.754.206>
- Долгов Н.А., Сорока Е.Б. Сингулярность полей напряжений в системе основа-покрытие. Проблемы прочности. – 2004. - №6. - С. 119-127.
- Larsson, S.G., Karlsson, A.J. (1973). Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small scale yielding at crack tips in elastic-plastic material. J. Mech. Phys. Solids, No. 21, pp. 263-278.
- Bouledroua O. Meliani M.H., Pluvinaud G. A review of T-stress calculation methods in fracture mechanics. Nature & Technologie. A Sciences fondamentales et Engineering. Juin. - 2016. - Vol. 5, No. 1.
- Gross B., Srawley J.E., W.F. Brown, Jr. Stress-Intensity Factor for a Single – Edge – Notch Tension Specimen by Boundary Collocation of a Stress Function // National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C. 1964.
- Wilson, W.K., Clark W.G., Jr, and Wessel E.T. Engineering Methods for the Design and Selection of Materials Against Fracture // Final Technical Report, Contract DA-30-069-AMC-602(T) June 1966. Available through Defense Documentation Center, Cameron Station, Alexandria, Va., №AD 801005.
- Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов. Киев: Наук, думка, - 1988. - Том. 2.
- Chiang C.R. A numerical method for solving elastic fracture problems // Computers and Structures. – 1989. - Vol. 32, No. 5. - pp. 1195-1197.
- Gao Pei-Qing Stress intensity factors for a rectangular plate with a point-loaded edge crack by a boundary collocation procedure, and an investigation into the convergence of the solutions // Engineering Fracture Mechanics. – 1985. - Vol. 22, No. 2. pp. 295-305.
- Fett T. Stress intensity factors and weight functions for the edge cracked plate calculated by the boundary collocation method // Kernforschungszentrum Karlsruhe GmbH (Germany, F.R.). Inst. fuer Material- und Festkoerperforschung, 1990. - 61 p.
- Fett, T. A semi-analytical study of the edge-cracked circular disc by use of the boundary collocation method, In Engineering Fracture Mechanics, 1997. - Vol. 56, No. 3, pp. 331-346.
- Hellen T.K., On the method of virtual crack extensions. // Int. J. Numer. Meth. Engng 9, 1975, pp. 187-207.
- Мусхелишвили Н.И., Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
- Ansys Inc. User Guide Release 12.0 (2012) ANSYS Inc.